第一章
随机事件与概率

教材知识架构

- 随机事件与概率
  - 随机事件的关系与运算
    - 随机事件的概念及表达
    - 随机事件之间的关系
    - 随机事件的基本运算规律
  - 概率
    - 频率及概率的定义
    - 概率的性质
    - 古典概型的概念
    - 简单古典概型的概率计算
  - 条件概率
    - 条件概率的定义
    - 用乘法公式计算概率
    - 全概率公式及贝叶斯公式
  - 事件的独立性
    - 事件独立性的概念
    - 用事件独立性计算概率
    - 伯努利概型

本章考纲解读

(一) 考核的知识点

1. 随机事件的概念及表示
2. 事件的包含与相等、和事件、积事件、互不相容事件、对立事件的概念及基本运算规律
3. 简单古典概型的概率计算
4. 乘法公式,会用乘法公式进行有关概率的计算

5. 全概率公式与贝叶斯公式，会用这两个公式进行概率计算

6. 事件独立性的概念，并会用事件的独立性计算概率

7. 伯努利概型

（二）自学要求

本章总的要求是：了解概率的定义，古典概型的定义，条件概率的概念，事件独立性的概念；熟悉简单的古典概型问题，用事件独立性进行概率计算；掌握随机事件之间的关系及其运算，掌握概率的基本性质，用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算，了解伯努利概型.

重点：随机事件的关系与运算，概率的概念、性质，条件概率，事件独立性的概念等.

难点：古典概型的概率计算，全概率公式，贝叶斯公式，事件独立性的概念.

重难点知识串讲

1. 随机事件的概念及表示

随机事件：在一次试验中，有可能出现，也可能不出现的事件. 习惯用 A、B、C 表示随机事件.

必然事件：在一次试验中，一定出现的事件. 习惯用 Ω 表示必然事件.

不可能事件：在一次试验中，一定不出现的事件. 习惯用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

随机试验的每一个可能出现的结果，叫做基本随机事件，简称基本事件，也叫样本点，习惯用 ω 表示基本事件. 全部基本事件组成的集合叫样本空间，记做 Ω（即 Ω 是必然事件）.

2. 随机事件的关系

(1) 事件的包含：设 A，B 为两个事件，若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，就称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含在事件 B 中，记做 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 如图 1-1 所示.

举例：掷骰子，A 表示“出现 3 点”，B 表示“出现奇数点”，则 $A \subset B$.

注意：与集合包含的区别.

(2) 事件的相等：若 $A \supset B$，且 $A \subset B$，则记做 $A = B$，即 A 与 B 相等，事件 A 等于事件 B，表示 A 与 B 实际上是同一事件.

3. 事件的运算

(1) 和事件：事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件叫事件 A 与事件 B 的和事件，记做 $A \cup B$ 或 $A + B$. 如图 1-2 所示.

解释：$A \cup B$ 包括三种情况，即 ①A 发生，但 B 不发生；②A 不发生，但 B 发生；③A 与 B 都发生.

性质：

①$A \subset (A \cup B)$，$B \subset (A \cup B)$；

② 若 $A \subset B$，则有 $A \cup B = B$；

③$A \cup A = A$.

举例：若A表示"掷骰子出现的点数小于3"，B表示"掷骰子出现的点数大于4"，则$A\cup B=\{1,2,5,6\}$.

(2) 积事件：事件A与事件B都发生的事件叫事件A与事件B的积事件，记做AB或$A\cap B$. 如图1-3所示.

解释：AB只表示一种情况，即A与B同时发生.

性质：

①$AB\subset A, AB\subset B$；

② 若$A\subset B$，则有$AB=A$；

③$AA=A$.

(3) 差事件：事件A发生而事件B不发生的事件叫事件A与事件B的差事件，记做$A-B$. 如图1-4所示.

举例：若A表示"掷骰子出现的点数小于5"，B表示"掷骰子出现的点数大于2"，则$A-B=\{1,2\}$.

性质：

①$A-B\subset A$；

② 若$A\subset B$，则有$A-B=\varnothing$；

③$A-B=A-AB$.

(4) 互不相容事件：若事件A与事件B不能同时发生，就说事件A与事件B互不相容(或互斥)，即$AB=\varnothing$. 如图1-5所示.

举例：A表示"掷骰子出现的点数小于3"与B表示"掷骰子出现的点数大于5"，则A与B互不相容.

(5) 对立事件：事件A不发生的事件叫事件A的对立事件，记做$\overline{A}$. 如图1-6所示.

解释：事件A与B互为对立事件，满足①$AB=\varnothing$，②$A\cup B=\Omega$.

性质：

①$A\cup\overline{A}=\Omega$；

②$A\overline{A}=\varnothing$；

③$A-B=A\overline{B}$.

注意：A与B对立，则A与B互不相容，反之不一定成立.

用图形直观地表示事件的关系和运算，如图1-1至图1-6所示，其中正方形表示必然事件或样本空间Ω.

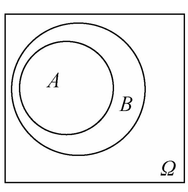

图1-1　表示事件$B\supset$事件A

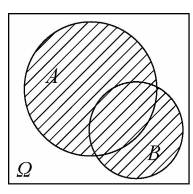

图1-2　阴影部分表示$A+B$

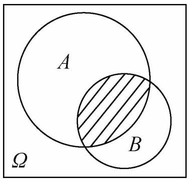

图 1-3　阴影部分表示 AB

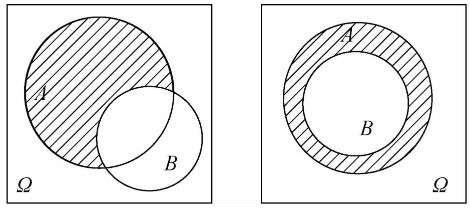

图 1-4　阴影部分表示 $A-B$

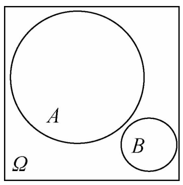

图 1-5　表示 A 与 B 互不相容

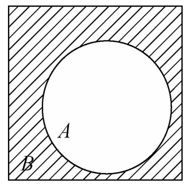

图 1-6　阴影部分表示 $B=\overline{A}$

事件的运算有如下规律：

(1)$A\cup B=B\cup A, AB=BA$ 叫交换律；

(2)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$ 叫结合律；

(3)$A(B\cup C)=AB\cup AC,(A\cup B)(A\cup C)=A\cup BC$ 叫分配律；

(4)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 叫对偶律.

真题链接

1. 某射手向一目标射击两次，A_i 表示事件“第 i 次射击命中目标”，$i=1,2$，B 表示事件“仅第一次射击命中目标”，则 $B=$　　（　　）

A. A_1A_2　　B. $A_1\overline{A_2}$　　C. $\overline{A_1}A_2$　　D. $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$

【答案】 B

【解析】 因为 $B=\{$仅第一次射击命中目标$\}$，

$A_1=\{$第一次射击命中目标$\},\overline{A_2}=\{$第二次射击没有命中目标$\}$，

所以 $B=A_1\overline{A_2}$.

2. 从一批产品中随机抽两次，每次抽 1 件. 以 A 表示事件“两次都抽得正品”，B 表示事件“至少抽得一件次品”，则下列关系式中正确的是　　（　　）

A. $A=\overline{B}$　　B. $A=B$　　C. $A\subset B$　　D. $B\subset A$

【答案】 A

【解析】 因为 $A=\{$两次都抽得正品$\}$，

$\overline{B}=\{$一次次品都没有抽得$\}$，

所以 $A=\overline{B}$.

真题链接

3. 掷一颗骰子，观察出现的点数．A 表示“出现 3 点”，B 表示“出现偶数点”，则　(　　)

A. $A \subset B$　　B. $A \subset \overline{B}$　　C. $\overline{A} \subset B$　　D. $\overline{A} \subset \overline{B}$

【答案】 B

【解析】 $\overline{B}$ 表示“出现奇数点”，即 $\overline{B} = \{1,3,5\}$，所以 $A \subset \overline{B}$.

4. 盒中有十个球，分别编有 1 至 10 的号码，设 $A = \{$取得球的号码是偶数$\}$，$B = \{$取得球的号码小于 5$\}$. 则 $\overline{AB} =$ ________.

【答案】 $\{1,3,5,6,7,8,9,10\}$

【解析】 $\overline{A} = \{$取得球的号码不是偶数$\}$，

$\overline{B} = \{$取得球的号码大于或等于 5$\}$，

$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} = \{$取得球的号码不是偶数或大于或等于 5$\}$

$= \{1,3,5,6,7,8,9,10\}$.

4. 频率与概率

(1) 频数与频率：在相同条件下进行 n 次试验，事件 A 发生 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 发生的频数；而比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记做 $f_n(A)$.

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

(2) $f_n(A)$ 的试验特性：随着 n 的增大，$f_n(A)$ 稳定地趋于一个数值，称这个数值为概率，记做 $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

概率是频率的一个稳定值.

(3) 由频率的性质推出概率的性质：

①$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$ 推出 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

②$f_n(\varnothing) = 0, f_n(\Omega) = 1$ 推出 $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$；

③A, B 互不相容，$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ 推出 A, B 互不相容，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$，可推广到有限多个和无限可列多个互不相容事件.

5. 古典概型

具有下面两个特点的随机试验的概率模型，称为古典概型：

(1) 基本事件的总数是有限个，或样本空间含有有限个样本点；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

计算公式：

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}} = \frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

真题链接

1. 抛一枚均匀硬币 3 次，设事件 A 表示“恰有 1 次出现正面”，B 表示“3 次均出现正面”，C 表示“至少一次出现正面”，试求 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$.

【解析 1】

设出现正面用 H 表示，出现反面用 T 表示，则样本空间 $\Omega=\{HHH,THH,HTH,HHT,TTH,THT,HTT,TTT\}$，样本点总数 $n=8$，又因为

$A=\{TTH,THT,HTT\}$，$B=\{HHH\}$，

$C=\{HHH,THH,HTH,HHT,TTH,THT,HTT\}$，

所以 A,B,C 中样本点数分别为

$$r_A=3,r_B=1,r_C=7,$$

则
$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{3}{8},P(B)=\frac{r_B}{n}=\frac{1}{8},P(C)=\frac{r_C}{n}=\frac{7}{8}.$$

【解析 2】

抛一枚硬币 3 次，基本事件总数 $n=2^3$，事件 A 包含了 3 个基本事件：“第 i 次是正面，其他两次都是反面”，$i=1,2,3$，所以 $r_A=3$.

显然事件 B 就是一个基本事件，它包含的基本事件数 $r_B=1$；

事件 C 包含的基本事件数 $r_C=n-r_B=2^3-1=7$.

故
$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{3}{8},P(B)=\frac{r_B}{n}=\frac{1}{8},P(C)=\frac{r_C}{n}=\frac{7}{8}.$$

2. 一批产品共有 100 件，其中 3 件次品. 现从这批产品中接连抽取两次，每次抽取一件，考虑两种情况：

(1) 不放回抽样，第一次取一件不放回，第二次再抽取一件；

(2) 放回抽样，第一次取一件检查后放回，第二次再抽取一件.

试分别针对上述两种情况，求事件 A“第一次抽到正品，第二次抽到次品”的概率.

【解析】

(1)$P(A)=\frac{97}{100}\times\frac{3}{99}$；(2)$P(A)=\frac{97}{100}\times\frac{3}{100}$.

6. 概率的定义与性质

(1) 定义：设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，它满足下列条件：

①$P(A)\geqslant 0$；

②$P(\Omega)=1$；

③ 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m,\cdots$ 是一列互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

(2) 性质：

①$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, P(\varnothing)=0$；

② 对于任意事件 A,B 有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

③$P(B-A)=P(B)-P(AB)$；

④$P(\overline{A})=1-P(A)$.

真题链接

1. 设 $P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB}), P(A \cup B), P(\overline{A}\,\overline{B})$.

【解析】

(1) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，

所以 $\quad P(AB)=P(A)-P(A-B)$

$\quad\quad\quad\quad =0.7-0.3=0.4$，

所以 $\quad P(\overline{AB})=1-P(AB)$

$\quad\quad\quad\quad =1-0.4=0.6$；

(2)$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\quad\quad\quad\quad =0.7+0.6-0.4=0.9$；

(3)$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A \cup B})$

$\quad\quad\quad\quad =1-P(A \cup B)$

$\quad\quad\quad\quad =1-0.9=0.1$.

2. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AC)=0$. 求：

(1)A,B,C 中至少有一个发生的概率；

(2)A,B,C 全不发生的概率.

【解析】

(1)“A,B,C 中至少有一个发生”表示为 $A \cup B \cup C$，则所求概率为

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}.$$

(2)$P(\overline{A \cup B \cup C})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

7. 条件概率与乘法公式

定义：设 A,B 为两个事件，在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率，记做 $P(A \mid B)$.

真题链接

1. 某工厂有职工 400 名，其中男女职工各占一半，男女职工中技术优秀的分别为 20 人与 40 人，从中任选一名职工，试问：

(1) 该职工技术优秀的概率是多少？

(2) 已知选出的是男职工，他技术优秀的概率是多少？

【解析】 设 A 表示"选出的职工技术优秀"，B 表示"选出的职工为男职工"．按古典概型的计算方法得：

(1)$P(A)=\frac{60}{400}=\frac{3}{20}$；

(2)$P(A\mid B)=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$.

乘法公式：当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$；

当 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$.

推广：

① 设 $P(AB)>0$，则 $P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$；

② 设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2. 设 A、B 为随机事件，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB)=$________.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 由 $P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$，所以 $P(AB)=P(BA)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

8. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 划分：设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足如下两个条件：

①$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $0\leqslant P(A_i)\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$；

②$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．如图 1-7 所示．

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分时，每次试验有且仅有其中一个发生．

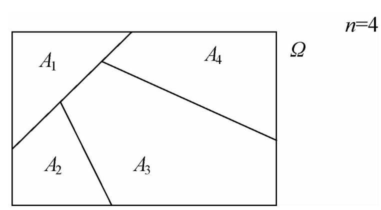

图 1-7

(2) 全概率公式：设随机试验的样本空间为 Ω，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，B 为任意一个事件，则 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$．如图 1-8 所示．

$\Omega\supset A$，A，$\overline{A}$ 是 Ω 的一个划分，则

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A}).$$

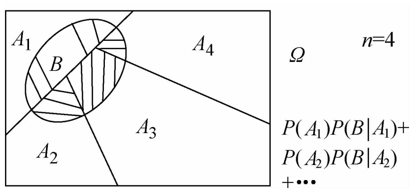

图 1-8

注意：当 $0 < P(A) < 1$ 时，A 与 $\overline{A}$ 就是 Ω 的一个划分，对任意事件 B 则有全概率公式的最简单形式为 $P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$.

(3) 贝叶斯公式：设随机试验的样本空间为 Ω，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，B 为任意一个事件，且 $P(B) > 0$，则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}, i = 1,2,\cdots,n.$$

注意：① 在使用贝叶斯公式时，往往先利用全概率公式计算 $P(B)$；

② 理解贝叶斯公式"后验概率"的意义.

真题链接

1. 盒中有 5 个白球 3 个黑球，连续不放回地从中取两次球，每次取一个，求第二次取球取到白球的概率.

【解析】　设 A 表示"第一次取球取到白球"，B 表示"第二次取球取到白球"，则

$$P(A) = \frac{5}{8}, P(\overline{A}) = \frac{3}{8},$$

$$P(B \mid A) = \frac{4}{7}, P(B \mid \overline{A}) = \frac{5}{7}.$$

所以
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

2. 在某工厂中有甲、乙、丙三台机器生产同一型号的产品，它们的产量各占 30%，35%，35%，并且在各自的产品中废品率分别为 5%，4%，3%，求从该厂的这种产品中任取一件是废品的概率.

【解析】　设 A_1 表示"从该厂的这种产品中任取一件产品为甲所生产"，A_2 表示"从该厂的这种产品中任取一件产品为乙所生产"，A_3 表示"从该厂的这种产品中任取一件产品为丙所生产"，B 表示"从该厂的这种产品中任取一件为废品"，则

$$P(A_1) = 30\%, P(A_2) = P(A_3) = 35\%,$$
$$P(B \mid A_1) = 5\%, P(B \mid A_2) = 4\%,$$
$$P(B \mid A_3) = 3\%.$$

真题链接

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=30\%\times5\%+35\%\times4\%+35\%\times3\%=3.95\%.$$

3. 有甲、乙两盒，甲盒装有 4 个白球 1 个黑球，乙盒装有 3 个白球 2 个黑球．从甲盒中任取 1 个球，放入乙盒中，再从乙盒中任取 2 个球．

(1) 求从乙盒中取出的是 2 个黑球的概率；

(2) 已知从乙盒中取出的是 2 个黑球，问从甲盒中取出的是白球的概率．

【解析】 (1) 设从甲盒中取出黑球为事件 A_1，取出白球为事件 A_2，则有 $P(A_1)=\frac{1}{5}$，$P(A_2)=\frac{4}{5}$，从乙盒中取出两个黑球为 B 事件，$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$ $=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{15}=\frac{7}{75}$.

(2)$P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{15}\times\dfrac{75}{7}=\dfrac{4}{7}$.

4. 针对某种疾病进行一种化验，患该病的人中有 90% 呈阳性反应，而未患该病的人中有 5% 呈阳性反应，设人群中有 1% 的人患这种病，若某人做这种化验呈阳性反应，则他患这种疾病的概率是多少？

【解析】 设 A 表示“某人患这种病”，B 表示“化验呈阳性反应”，则

$P(A)=0.01$，$P(\overline{A})=0.99$，$P(B\mid A)=0.9$，$P(B\mid\overline{A})=0.05$.

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=0.01\times0.9+0.99\times0.05=0.058\,5,$$

再由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.01\times0.9}{0.058\,5}\approx15.4\%.$$

9. 事件的独立性

(1) 概念：若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称 A，B 独立．

解释：事件 A，B 相互独立的含义是尽管 A，B 同时发生，但事件 A 发生的概率对事件 B 发生的概率没有影响，如“两个同时射击的射击员击中靶子的环数”，“两个病人服用同一种药物的疗效”等．因此，在实际应用中，往往根据实际情况来判断事件的独立性，而不是根据定义．

(2) 性质

① 设 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B)=P(B\mid A)$.

证明：$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$.

② 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立．

证明：只证 $\overline{A}$，B 相互独立，则只需证 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$.

$$\begin{aligned}\overline{A}B &= B - AB,\\ P(\overline{A}B) &= P(B-AB)\\ &= P(B)-P(AB)\\ &= P(B)-P(A)P(B)\\ &= P(B)[1-P(A)]\\ &= P(B)P(\overline{A}).\end{aligned}$$

从而得证.

(3) 推广

①3 个事件相互独立:设 A,B,C 为 3 个事件,若满足

$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(BC)=P(B)P(C)$,

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,

则称 A,B,C 相互独立,简称 A,B,C 独立.

②3 个事件两两相互独立:设 A,B,C 为 3 个事件,若满足

$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(BC)=P(B)P(C)$,

则称 A,B,C 两两相互独立.

显然,3 事件相互独立必有 3 事件两两相互独立,反之未必.

③n 个事件相互独立:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,若对于任意整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 和任意 k 个整数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,简称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立.

真题链接

1. 两射手彼此独立地向同一目标射击.设甲射中目标的概率为 0.9,乙射中目标的概率为 0.8,求目标被击中的概率.

【解析】 设 A 表示"甲射中目标",B 表示"乙射中目标",C 表示"目标被击中",则 $C=A\cup B$.

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由题意,A,B 相互独立,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$

故
$$P(C)=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98.$$

或
$$\begin{aligned}P(C)&=P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})\\ &=1-0.1\times 0.2=0.98.\end{aligned}$$

注:A,B 相互独立时,概率加法公式可以简化为 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$.

真题链接

2. 袋中有 5 个白球 3 个黑球，从中有放回地连续取两次，每次取一个球，求两次取出的都是白球的概率.

【解析】 设 A 表示"第一次取球取到白球"，B 表示"第二次取球取到白球"，由于是有放回抽取，A 与 B 是相互独立的.所求概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{64}.$$

点评：

有放回：第一次不管抽取的是什么球，对第二次抽取没影响.显然，两次抽取是相互独立的.

不放回：第一次取到白球的概率是$\frac{5}{8}$，第二次再取到白球的概率是$\frac{4}{7}$.显然，两次抽取不是相互独立的.

注：如果是"有放回"，则两次取球就是相互独立的.

3. 3 门高射炮同时对一架敌机各发一炮，它们的命中率分别为 0.1，0.2，0.3，求敌机恰中一弹的概率.

【解析】 设 A_i 表示"第 i 门炮击中敌机"，$i=1,2,3$，B 表示"敌机恰中一弹".

$$B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,$$

其中，$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，$\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 互不相容，且 A_1，A_2，A_3 相互独立，则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3\\&=0.398.\end{aligned}$$

10. n 重伯努利试验

(1) 概念：如果一次试验只有两个结果，事件 A 发生或不发生，且 $P(A)=p(0<p<1)$，试验独立重复 n 次，称为 n 重伯努利试验.

(2) 计算：在 n 重伯努利试验中，设每次试验事件 A 发生的概率为 p，则事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

事实上，A 在指定的 k 次试验中发生，而在其余 $n-k$ 次试验中不发生的概率为

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

真题链接

1. 一个车间有 5 台同类型的且独立工作的机器，假设在任一时刻 t，每台机器出故障的概率为 0.1，问在同一时刻：

(1) 没有机器出故障的概率是多少；

(2) 至多有一台机器出故障的概率是多少.

【解析】 在同一时刻观察 5 台机器，它们是否出故障是相互独立的，故可看做 5 重伯努利试验，$p=0.1,q=0.9$. 设 A_0 表示"没有机器出故障"，A_1 表示"有一台机器出故障"，B 表示"至多有一台机器出故障"，则 $B=A_0\cup A_1$. 于是有：

(1) 所求概率 $P(A_0)=P_5(0)=C_5^0(0.1)^0(0.9)^5=0.59049$；

(2) 所求概率
$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)+P(A_1)=P_5(0)+P_5(1)\\&=C_5^0(0.1)^0(0.9)^5+C_5^1(0.1)^1(0.9)^4=0.91854.\end{aligned}$$

2. 转炉炼钢，每一炉钢的合格率为 0.7，现有若干台转炉同时冶炼. 若要求至少能够炼出一炉合格钢的把握为 99%，问同时至少要有几台转炉炼钢？

【解析】 设有 n 个转炉同时炼钢，各炉是否炼出合格钢是独立的，可看做 n 重伯努利试验，$p=0.7,q=0.3$，

$$\{\text{至少炼出一炉合格钢}\}+\{\text{全不合格}\}=\Omega,$$

$$\begin{aligned}P\{\text{至少炼出一炉合格钢}\}&=1-P\{\text{全不合格}\}\\&=1-P_n(0)\\&=1-q^n=1-(0.3)^n\geqslant 0.99,\end{aligned}$$

即 $0.3^n\leqslant 0.01$，则 $n\geqslant 4$.

故至少要有 4 台转炉同时炼钢才能满足要求.

知识强化训练

1. 设 A 与 B 互为对立事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，则下列各式中错误的是　(　　)

A. $P(A)=1-P(\overline{A})$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(\overline{AB})=1$　　D. $P(A\cup B)=1$

2. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)>0$，则 $P(A\cup B\mid A)=$　(　　)

A. $P(AB)$　　B. $P(A)$　　C. $P(B)$　　D. 1

3. 从标号为 1,2,…,101 的 101 个灯泡中任取一个，则取得标号为偶数的概率是　(　　)

A. $\frac{50}{101}$　　B. $\frac{51}{101}$　　C. $\frac{50}{100}$　　D. $\frac{51}{100}$

4. 设事件 A,B 满足 $P(A-B)=0.2,P(A)=0.6$，则 $P(AB)=$　(　　)

A. 0.12　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

5. 设每次试验成功的概率为 $p(0 < p < 1)$，则在3次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）

A. $1-(1-p)^3$　　B. $p(1-p)^2$

C. $C_3^1 p(1-p)^2$　　D. $p+p^2+p^3$

6. 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.2, P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ ________.

7. 一批产品，由甲厂生产的占 $\frac{1}{3}$，其次品率为5%，由乙厂生产的占 $\frac{2}{3}$，其次品率为10%，从这批产品中随机取一件，恰好取到次品的概率为________.

8. 设 $P(A)=0.4, P(B)=0.5$，且 $P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.3$，求 $P(AB)$.

9. 20件产品中，有2件次品，不放回地从中连续取两次，每次取一件产品，则第二次取到正品的概率为________.

10. 甲乙两门高射炮彼此独立地向一架飞机各发一炮，甲乙击中飞机的概率分别为0.3，0.4，则飞机至少被击中一炮的概率为 ________.

11. 在一次考试中，某班学生数学和外语的及格率都是0.7，且这两门课是否及格相互独立，现从该班任选一名学生，则该学生数学和外语只有一门及格的概率为________.

12. 设 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B\mid\overline{A})=0.4$，求 $P(AB)$.

13. 已知一批产品中有95%是合格品，检查产品质量时，一个合格品被误判为次品的概率为0.02，一个次品被误判为合格品的概率是0.03. 求：

(1) 任意抽查一个产品，它被判为合格品的概率；

(2) 一个经检查被判为合格品的产品确实是合格品的概率.

参考答案及解析

1.【答案】 B

【解析】 ①$AB=\varnothing$；②$A\cup B=\Omega$.

【点拨】 对立事件的概念，$AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$.

2.【答案】 D

【解析】 $A\cup B\supset A$.

【点拨】 $A\cup B$ 包含 A，若 A 发生，则 $A\cup B$ 必然发生.

3.【答案】 A

【解析】 设 A 为“取得灯泡编号为偶数”，$P(A)=\frac{\text{编号为偶数的灯泡个数}}{\text{灯泡总数}}=\frac{50}{101}$.

【点拨】 古典概型概率，$P(A)=P\{(\omega_1)\cup(\omega_2)\cup\cdots\cup(\omega_m)\}=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_m)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$.

4.【答案】 B

【解析】 如图1-9所示.

【点拨】 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4$.

5.【答案】 A

【解析】 三次均失败的概率为$(1-p)^3$，故至少成功一次的概率为$1-(1-p)^3$.

【点拨】 伯努利概型公式，$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$.

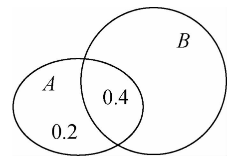

图 1-9

6.【答案】 0.52

【解析】
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.52.$$

【点拨】 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

7.【答案】 $\frac{1}{12}$

【解析】 设A_1表示"甲厂生产"，A_2表示"乙厂生产"，B表示"次品".
$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$
$$=\frac{1}{3}\times 5\%+\frac{2}{3}\times 10\%=\frac{25}{300}=\frac{1}{12}.$$

【点拨】 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$.

8.【答案】 0.05

【解析】
$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})}$$
$$=\frac{1-P(A\cup B)}{P(\overline{B})}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{P(\overline{B})},$$
$$P(AB)=P(\overline{A}\mid\overline{B})P(\overline{B})+P(A)+P(B)-1$$
$$=0.05.$$

【点拨】 $P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})}$.

9.【答案】 $\frac{9}{10}$

【解析】 {第二次取正品} = {一次且二正} ∪ {一正且二正}，
$$P\{二正\}=P\{一次且二正\}+P\{一正且二正\}$$
$$=\frac{2}{20}\times\frac{18}{19}+\frac{18}{20}\times\frac{17}{19}$$
$$=\frac{9}{10}.$$

【点拨】 {第二次取正品} = {一次且二正} ∪ {一正且二正}.

10.【答案】 0.58

【解析】 $1-(1-0.3)\times(1-0.4)=1-0.42=0.58$.

【点拨】 都不击中的对立事件的概率.

11.【答案】 0.42

【解析】 $0.7\times(1-0.7)+0.7\times(1-0.7)=0.42$.

【点拨】 乘法公式.

12.【答案】 0.4

【解析】 因为$P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A} \mid B)$，

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.5,$$

所以 $$0.5 \times 0.4 = 0.6 \times P(\overline{A} \mid B),$$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{1}{3},$$

$$P(A \mid B) = 1 - P(\overline{A} \mid B) = \frac{2}{3},$$

所以 $$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B) = 0.4.$$

【点拨】 $P(AB) = P(B)P(A \mid B)$.

13.【答案】 (1)0.932 5；(2)0.998 4

【解析】 设A表示“合格品”，B表示“被判为次品”，则：

$P(A) = 0.95$；$P(\overline{A}) = 0.05$；$P(B \mid A) = 0.02$；$P(\overline{B} \mid A) = 0.98$；$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.03$.

(1) 由全概率公式可得

$$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} \mid A) + P(\overline{A})P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.95 \times 0.98 + 0.05 \times 0.03 = 0.932\,5.$$

(2) 由贝叶斯公式可得

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A)P(\overline{B} \mid A)}{P(\overline{B})} = \frac{0.95 \times 0.98}{0.9325} \approx 0.998\,4.$$

【点拨】 全概率公式和贝叶斯公式，$P(B_i \mid A) = \dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$.